Préparation à l'agrégation externe

Niveau MPSI/L1 (énoncés)

Loïc ALAVOINE

10 décembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

1.1 Exercice 1

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ 2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3\ .$$

1.2 Exercice 2

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\ .$$

Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
1°) Exprimer à l'aide du factorielle de n, notée $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.
2°) On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \ .$$

2.2 Exercice 2

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2\ 022 \ .$$

2.3 Exercice 3

Calculer :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} \ .$$

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Exercice 1

Calculer la partie réelle du nombre complexe $A := \dfrac{3-i}{(1+i)(1+2i)}$.

3.2 Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\dfrac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

3.3 Exercice 3

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, montrer que $\dfrac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.

3.4 Exercice 4

Montrer que :

$$\forall\ z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2},\ \mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \text{ et } \overline{\overline{z}} = z\ .$$

Chapitre 4

Raisonnement, opérations sur les ensembles

4.1 Exercice 1

Soient $a \leq b$ deux réels. prouver par double inclusion que :

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)\, a + \lambda b \mid \lambda \in [0; 1]\} \ .$$

Chapitre 5

Applications, relations, entiers naturels

5.1 Exercice 1

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset E$ et $B \subset E$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

5.2 Exercice 2

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset F$ et $B \subset F$, montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

5.3 Exercice 3

1°) Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset E$ et $B \subset E$, montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2°) Montrer que f injective $\Longrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3°) Fournir un contre-exemple qui permet d'illustrer pourquoi il faut avoir une application injective pour avoir l'égalité.
4°) Finalement, montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Longrightarrow f$ injective et conclure.

5.4 Exercice 4

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset F$ et $B \subset F$, montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

5.5 Exercice 5

Sur l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$, on définit la relation $\sim$ par :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \Longleftrightarrow \exists\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq p,\ u_n = v_n\ .$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

5.6 Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que :
1°) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2°) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3°) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

5.7 Exercice 7

Déterminer les réels α tels que la relation binaire définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \star y = xy + \alpha (x+y)$$

soit associative.

5.8 Exercice 8

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$, montrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.

Chapitre 6

Nombres réels, suites numériques

6.1 Exercice 1

Montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se définissant pour tout entier naturel n comme $u_n := (-1)^n$ est divergente (à partir de la définition de divergence).

6.2 Exercice 2

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := n^{-1}$.
1°) Pour $\varepsilon := 10^{-3}$, trouver un entier $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.
2°) Enfin, démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0 (en utilisant la définition).

6.3 Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un $u_n := \dfrac{3n}{2n^2-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1°) Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_1,\ |u_n| \leq 10^{-4}$.
2°) Trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_2,\ |u_n| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.

6.4 Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que cette suite est stationnaire.

6.5 Exercice 5

1°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in\ ]a,b[$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in\ ]a,b[$.
2°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$). Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$).

6.6 Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ avec $l_1 < l_2$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, nous avons $u_n < v_n$.

6.7 Exercice 7

Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n\ .$$

6.8 Exercice 8

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui se définit comme $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et donner sa limite si cette dernière converge.

6.9 Exercice 9

Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien.

6.10 Exercice 10

Montrer que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha\ .$$

6.11 Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par $u_n := \dfrac{n^2-2}{n^2+n}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
1°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2°) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3°) Démontrer à l'aide de la définition d'une suite réelle convergente et de la réponse obtenue à la deuxième question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$.

6.12 Exercice 12

Montrer l'existence et l'unicité de la partie entière par défaut.

6.13 Exercice 13

Montrer que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

6.14 Exercice 14

Étant donné deux réels x et y, a-t-on toujours $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

6.15 Exercice 15

Montrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

6.16 Exercice 16

Montrer la propriété d'Archimède multiplicative sur $\mathbb{R}$.

6.17 Exercice 17

Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ défini par :

$$\mathcal{A} := \left\{ x \in [0;1] \;\middle|\; \exists\ k\ [\![0;2^n]\!],\ x := \frac{k}{2^n} \right\}$$

est dense dans $[0;1]$.